



QUESTÃO 1 [PONTO 3 : FORMA CANÔNICA DE JORDAN]

(1) Toda matriz A $n \times n$ com entradas nos números complexos é similar à uma forma canônica de Jordan J , ou seja, uma matriz $n \times n$ com blocos de Jordan em sua diagonal e 0 no resto:

$$J = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & & 0 \\ & J_{\lambda_2} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & J_{\lambda_k} \end{bmatrix}$$

Cada bloco de Jordan é uma matriz quadrada da forma:

$$J_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix} ; \lambda_i \in \mathbb{C}$$



Deixamos claro também que o conceito de matrizes similares significa que existe X matriz $n \times n$ invertível tal que:

$$A = X J X^{-1}$$

(2) Note que:

$$\det(tI - A) = t(t^4 + 2at^2 + a^2) = t(t + a^{1/2})^2(t - a^{1/2})^2$$

Unde $a^{1/2} \in \mathbb{C}$ se $a < 0$. Ou seja, A tem autovalores 0 , $a^{1/2}$ e $-a^{1/2}$. O autovalor 0 tem multiplicidade algébrica 1 e portanto só pode ter multiplicidade geométrica 1. Já os autovalores $a^{1/2}$ e $-a^{1/2}$ tem multiplicidade algébrica 2, e assim podem ter multiplicidade geométrica 1 ou 2. De fato, as possíveis Formas Canônicas de Jordão associadas vão depender de tais multiplicidades geométricas.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

Caso 1 : $\bullet a^{1/2}$ tem multiplicidade geométrica 1

$\bullet -a^{1/2}$ tem multiplicidade geométrica 1

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{1/2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^{1/2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a^{1/2} \end{bmatrix}$$

Caso 2 : $\bullet a^{1/2}$ tem multiplicidade geométrica 2

$\bullet -a^{1/2}$ tem multiplicidade geométrica 1

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^{1/2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a^{1/2} \end{bmatrix}$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

Caso 3:

- $a^{1/2}$ tem multiplicidade geométrica 1
- $-a^{1/2}$ tem multiplicidade geométrica 2

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{1/2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a^{1/2} \end{bmatrix}$$

Caso 4:

- $a^{1/2}$ tem multiplicidade geométrica 2
- $-a^{1/2}$ tem multiplicidade geométrica 2

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a^{1/2} \end{bmatrix}$$

Obs: O item (3) desta questão está no segundo caderno de provas



QUESTÃO 3 [PONTO 10 : TEOREMA CENTRAL DO LIMITE]

(1) Sejam $X_1, X_2, \dots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com $E[X_i] = \mu$ e $\text{Var}(X_i) = \sigma^2 < +\infty$, então:

$$\frac{S_n - n\mu}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow{d} X$$

onde $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, X denota uma normal padrão i.e. uma normal com média 0 e variância 1 e o símbolo $\xrightarrow{d}$ denota a convergência em distribuição.

(2) A demonstração é consequência de alguns fatos, são eles

(i) Seja $X_1, \dots, X_n, \dots$ uma sequência de variáveis aleatórias com função característica $\varphi_{X_i}(t) = E[e^{itX_i}]$, se $\varphi_{X_i}(t)$ converge



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

pontualmente para uma função φ contínua no 0, então φ é função característica de uma variável aleatória X e :

$$X_n \xrightarrow{d} X$$

(ii) A função característica de uma normal padrão X é $\varphi_X(t) = e^{-t^2/2}$

(iii) Se $E[X^2] < \infty$, então

$$\varphi_X(t) = 1 + itE[X] - \frac{t^2}{2}E[X^2] + o(t^2)$$

Para provar o Teorema, podemos assumir sem perda de generalidade que $E[X_i] = 0$, pois definindo $X_i' := X_i - \mu$ conseguimos o caso geral, aplicando o fato (iii) à X_i , obtemos

$$\varphi_{X_i}(t) = 1 - \frac{t^2 \sigma^2}{2} + o(t^2)$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

Vamos agora então calcular a função característica
de $\frac{S_n}{\sigma n^{1/2}}$:

$$\varphi_{S_n/\sigma n^{1/2}}(t) = E \left[e^{it \frac{S_n}{\sigma n^{1/2}}} \right] = \prod_{i=1}^n E \left[e^{it \frac{X_i}{\sigma n^{1/2}}} \right] =$$

$$= \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i} \left(\frac{t}{\sigma n^{1/2}} \right) = \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \right)^n$$

Agora usaremos o fato dos números complexos que, se $(C_n) \in \mathbb{C}$
 $n \in \mathbb{N}$

com $C_n \rightarrow C \in \mathbb{C}$, então $\left(1 + \frac{C_n}{n}\right)^n \rightarrow e^C$. Com

isso, vemos que :

$$\varphi_{S_n/\sigma n^{1/2}}(t) \rightarrow e^{-t^2/2} = \varphi_X(t)$$

E usando os fatos (i) e (ii), o Teorema está provado $\square$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

(3) Usando a definição de esperança e variância, notamos que $E[X_j] = 0$ e :

$$\text{Var}(X_j) = E[X_j^2] = \frac{1}{2} \cdot j^{-1} + \frac{1}{2} j^{-1} = \frac{1}{j}$$

Dessa forma, a esperança de S_n será 0, enquanto seu desvio padrão será $\left(\sum_{m=1}^n \frac{1}{m}\right)^{1/2}$, número que tomaremos a liberdade de chamar de σ_n . É natural então pensar que poderíamos obter o seguinte resultado:

$$\frac{S_n}{\sigma_n} \xrightarrow{d} X$$

Onde X é normal padrão.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

Um esboço da demonstração seria novamente considerar a função característica de S_{n/σ_n} e notar que:

$$\varphi_{S_{n/\sigma_n}}(t) = \prod_{j=1}^n \varphi_{x_{j/\sigma_n}}(t) = \prod_{j=1}^n \mathbb{E}[e^{it x_{j/\sigma_n}}] =$$

$$= \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} e^{it j^{-1/2}/\sigma_n} + \frac{1}{2} e^{-it j^{-1/2}/\sigma_n} \right) = \prod_{j=1}^n \cos\left(\frac{j^{-1/2}t}{\sigma_n}\right)$$

Expandindo o cosseno pela Fórmula de Taylor de segunda ordem, obteríamos:

$$\varphi_{S_{n/\sigma_n}}(t) = \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{t^2}{2j\sigma_n} + o\left(\frac{t^2}{j\sigma_n}\right) \right)$$

Restaria mostrar que este produto de fato converge para $e^{-t^2/2}$.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

(4) Como foi dito no último ponto, a ideia é que, quando as variáveis aleatórias $X_1, \dots, X_m, \dots$ não são identicamente distribuídas, mas somente independentes, que renormalizemos S_m pelo seu desvio padrão, dado por $\sigma_m := \left(\sum_{m=1}^m \text{Var}(X_m) \right)^{1/2}$. A hipótese é que, para um bom comportamento da convergência em distribuição de S_m/σ_m , temos que a série acima deve divergir. Fazendo as contas para o nosso caso com $2 \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\text{Var}(X_m) = E[X_m^2] = \frac{1}{2} m^{2\alpha} + \frac{1}{2} m^{2\alpha} = m^{2\alpha}$$

Dando origem à série $\sum_{m=1}^{\infty} m^{2\alpha}$. Sendo assim:

(i) se $2\alpha \geq -1 \Leftrightarrow \alpha \geq -1/2$, a série diverge e,

portanto:

$$\frac{S_m}{\sigma_m} \xrightarrow{d} X$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

CONTINUAÇÃO DA QUESTÃO 3 ITEM (4)

(ii) Se $\Re z < -1 \Leftrightarrow \Re z < -1/2$, a série converge
e, portanto, não há convergência em distribuição de
 S_n/σ_n .

QUESTÃO 1 (CONTINUAÇÃO)

(3) Primeiramente, vale notar que B é de fato
invertível, pois seu polinômio característico mostra que
ela não possui autovalor nulo. A estratégia deste exercício
será tentar mostrar que B e B^{-1} possuem a mesma
forma canônica de Jordan. Sendo assim, ambas seriam
similares a uma mesma forma J e portanto similares
entre si. Para isso, começaremos notando que
o único autovalor λ de B é $\lambda = 1$ com



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

multiplicidade algébrica n . Isto implica, em particular, que ~~(todos os)~~ B^{-1} também só possui autovalor $\lambda = 1$ e com multiplicidade algébrica n . Ademais, se W_B é o ~~(subespaço)~~ autoespaço de B associado ao autovalor $\lambda = 1$ e $W_{B^{-1}}$ é definido de forma similar, então:

$$(i) \ w \in W_B \Rightarrow (\cancel{Aw=w}) \ Bw = w \Rightarrow w = B^{-1}w \Rightarrow w \in W_{B^{-1}}$$

$$(ii) \ w \in W_{B^{-1}} \Rightarrow B^{-1}w = w \Rightarrow w = Bw \Rightarrow w \in W_B$$

Isto mostra que $W_{B^{-1}} = W_B$ e assim o autovalor $\lambda = 1$

tem a mesma multiplicidade geométrica para B e B^{-1} .

Resta agora mostrar que B e B^{-1} possuem ciclos de Jordan do mesmo tamanho, para isso, seja:



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

$$V_p \xrightarrow{B-I} V_{p-1} \xrightarrow{B-I} \dots \xrightarrow{B-I} V_1 \rightarrow 0$$

um ciclo de Jordan de B . Em particular, temos que V_1 é autovetor de B e, portanto:

$$BV_1 = V_1 \Rightarrow V_1 = B^{-1}V_1$$

~~Daí~~ De fato, V_1 também é autovetor de B^{-1} , agora note que:

$$(\cancel{BV_1 - V_1 = V_2}) \quad BV_2 - V_2 = V_1$$

Aplicando B^{-1} à esquerda, obtemos:

$$V_2 - B^{-1}V_2 = V_1 \Rightarrow (B^{-1} - I)(-V_2) = V_1$$

Aplicando o processo de forma indutiva, vemos que podemos construir um ciclo de Jordan para B^{-1} associado ao ciclo de Jordan original.



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

Isto implica que tanto B quanto B^{-1} tem a mesma forma canônica de Jordan e, portanto, são similares.

QUESTÃO 2 [PONTO 6 : TEOREMA DE STOKES]

(1) Primeiro enunciaremos para o rotacional:

Teorema: Seja $f: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ de classe C^2 onde S é uma superfície fechada ^{em $\mathbb{R}^3$} tendo como fronteira a curva denotada por ∂S . Então:

$$\int_{\partial S} f \, ds = \iint_S \nabla \otimes f \, d\mathbf{n}$$

Onde as integrais acima denotam integrais de linha e superfície, respectivamente, e:



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

$$\nabla \otimes f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

E agora enunciaremos o Teorema para divergência:
de $\text{Lune} \mathbb{C}^2$,

Teorema: Seja $f: V \rightarrow \mathbb{R}^3$ onde V é um volume
fechado $\checkmark$ tendo como fronteira a superfície denotada por
 ∂V . Então:

$$\iint_{\partial V} f \, d\mathbf{n} = \iiint_V \nabla \cdot f \, dx \, dy \, dz$$

Onde as integrais acima denotam integrais de superfície
e volume, respectivamente, e:

$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

(2) Como $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right)$, ~~de~~ verificamos

que:

$$\nabla \cdot (\nabla u) = \nabla \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$= \Delta u$$

Sendo assim, uma aplicação direta do Teorema de Gauss para $f = \nabla u$ nos mostra que:

$$\iiint_R \Delta u \, dx \, dy \, dz = \iint_{\partial R} \nabla u \, d\mathbf{n}.$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

(3) Para conseguir efetuar esta conta, temos que conseguir calcular ∇u em termos das derivadas parciais em relação a r , ϕ e θ . Aqui usaremos a regra da cadeia. Antes disso, considere a superfície R , obtida quando fixamos $\phi = \phi_1$, logo ela é parametrizada por:

$$\varphi_1 = (r \cos \phi_1 \sin \theta, r \sin \phi_1 \sin \theta, r \cos \theta)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = (\cos \phi_1 \sin \theta, \sin \phi_1 \sin \theta, \cos \theta)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} = (r \cos \phi_1 \cos \theta, r \sin \phi_1 \cos \theta, -r \sin \theta)$$

Com algumas contas, podemos notar que:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \otimes \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} = (-r \sin \phi_1, r \cos \phi_1, -r \sin \phi_1)$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

Agora temos que calcular o gradiente. Note que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} =$$

$$= \frac{1}{\cos \varphi \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r \cos \varphi \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{-r \sin \varphi \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} =$$

$$= \frac{1}{\cos \varphi \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r \cos \varphi \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \varphi \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} =$$

$$= \frac{1}{\sin \varphi \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \varphi \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{r \cos \varphi \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial z} =$$

$$= \frac{1}{\cos \theta} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$



CONCURSO PARA PROFESSOR ADJUNTO A - IM
EDITAL 54/2024

Não muitos contos se quisermos calcular as 6 integrais,
porém a ideia é chegar a conclusão, interpretando tais
integrais como integrais em $\mathbb{R}$, de forma que:

$$\iint_{\partial R} \nabla u \cdot d\mathbf{n} = \iiint_R \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}) + \frac{\partial}{\partial \phi} (\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi}) \right) dr d\theta d\phi$$

E assim concluir que o lado direito é igual ao Laplaciano
de u .